Εισαγωγή στις Πιθανότητες

Ασκήσεις στις Τυχαίες Μεταβλητές – Κατανομές

Ακαδημαϊκό Έτος 2015-2016

1. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f(x)=\begin{cases} C(4x-2x^2) & \text{για } 0<x<2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς C.

β) Να βρεθούν οι ακόλουθες πιθανότητες: i) $P(X>1)$, ii) $P(X<1)$, iii) $P(X>1 \mid X<1.5)$ και iv) $P(0.5<X<1.5)$.

γ) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τυχαίας μεταβλητής X.

δ) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $A=\{X>1\}$ και $B=\{X<1.5\}$ είναι ανεξάρτητα.

2. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{για } x<0 \\ x/4 & \text{για } 0\le x<1 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4} & \text{για } 1\le x<2 \\ 11/12 & \text{για } 2\le x<3 \\ 1 & \text{για } 3\le x \end{cases}$$

μπορεί να παριστάνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής X. Έπειτα να βρείτε τις πιθανότητες $P(X=i)$, για $i=1,2,3$.

3. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{για } x<0 \\ 1/2 & \text{για } 0\le x<1 \\ 3/5 & \text{για } 1\le x<2 \\ c & \text{για } 2\le x<3 \\ 9/10 & \text{για } 3\le x<3.5 \\ 1 & \text{για } 3.5\le x \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η σταθερά c όταν γνωρίζουμε ότι $P(X=2)=1/5$. Να υπολογίσετε έπειτα την συνάρτηση πιθανότητας.

4. Ένας παίκτης εκλέγει δύο σφαίρες από ένα κουτί, στο οποίο περιέχονται 8 άσπρες, 4 μαύρες και 2 κόκκινες σφαίρες. Υποθέτουμε ότι ο παίκτης κερδίζει 2 € (Ευρώ) για κάθε μαύρη σφαίρα, χάνει 1 € για κάθε άσπρη, ενώ δεν κερδίζει ούτε χάνει τίποτε για κάθε κόκκινη σφαίρα που επιλέγει. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Χ που παριστάνει το κέρδος σε € του παίκτη, όταν οι σφαίρες επιλέγονται α) χωρίς επανάθεση β) με επανάθεση.

5. Έστω ένα ζάρι ρίχνεται δύο φορές. Να βρεθούν οι σ.π. των τυχαίων μεταβλητών που παριστάνουν α) τη μέγιστη τιμή εμφάνισης στις δύο ρίψεις, β) την ελάχιστη τιμή εμφάνισης στις δύο ρίψεις, γ) το άθροισμα των δύο ρίψεων, δ) την τιμή της πρώτης ρίψης μείον την τιμή της δεύτερης , ε) το γινόμενο των δύο ρίψεων.

6. Κάποιος επιλέγει 3 μπάλες χωρίς επανάθεση από ένα κουτί που περιέχει 3 άσπρες, 3 κόκκινες και 5 μαύρες. Υποθέτουμε ότι κερδίζει 1 € (Ευρώ) για κάθε άσπρη, χάνει 1 € για κάθε κόκκινη, ενώ ούτε κερδίζει ούτε χάνει για κάθε μαύρη που επιλέγει. Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το κέρδος του παίκτη. α) Ποιες οι πιθανές τιμές της Χ; β) Ποια η συνάρτηση πιθανότητας; γ) Ποια η αθροιστική συνάρτηση; δ) Ποια η πιθανότητα κάποιος να κερδίσει χρήματα; ε) Ποια η πιθανότητα κάποιος να κερδίσει i € (Ευρώ) όταν γνωρίζουμε ότι έχει κερδίσει κάτι;

7. Έστω ότι ρίχνουμε 3 νομίσματα. Να βρεθεί α) η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που παριστάνει των αριθμό των Κορωνών, β) η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που παριστάνει των αριθμό των Γραμμάτων μείον τον αριθμό των Κορωνών.

8. Αν Χ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με $P(X=x)=\lambda\alpha^{x}$, $0<\alpha<1$, $x=0,1,2,\dots,\kappa$. Να προσδιοριστεί η σταθερά λ έτσι ώστε η παραπάνω να είναι συνάρτηση πιθανότητας. Έπειτα να υπολογιστούν οι πιθανότητες i) $\mathrm{P}(X<4.2)$, ii) $P(X>1.2)$ και iii) $P(X>1.2/X<2.7)$.

9. Να βρεθεί η τιμή του κ έτσι ώστε η $P(X=x)=\kappa 2^{x}$, $x=1,2,\dots,\nu$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^{*}$, να είναι συνάρτηση πιθανότητας.